ויטגנשטיין: פילוסופיה של המתמטיקה

“I don’t know why we are here, but I’m pretty sure that it is not in order to enjoy ourselves”

מרצה: פרופ׳ מרק שטיינר (אמריטוס)
מסכם: עומר שכטר — omer.shechterSHTRUDELmail.huji.ac.il
ניתן בסמסטר סתיו ה׳תשע"ו באוניברסיטה העברית בירושלים
אשמח לקבל תיקונים והערות, קטנים כגדולים
גרסה 20200725

תוכן עניינים

1 מבוא

"החלטתי ללמד סמינר מתקדם אחד בשנה כדי לא לחסוך לאוניברסיטה כסף ואז יהיה להם תירוץ לא להעסיק איזה צעיר, אבל כיוון שהם לא הביאו במקומי אדם שמלמד ויטגנשטיין למשל, לפני עשר שנים היו עשרה אנשים בחוג לפילוסופיה. ישבנו פעם בישיבת חוג, התווכחנו שלוש שעות על הנושא: "אם היה לנו כסף, את מי היינו מביאים?", זה היה ויכוח קשה.

יום אחרי זה הזמינו אותי מהמחלקה למתמטיקה להיות צופה מהחוץ, אז ראיתי שיש מנעול וכדי להיכנס צריך לדעת קוד, כי יש שם ציוד יקר כמו מכונת אספרסו. פרופ' קשדן הביא לי ברוב אדיבותו קפה, אז ישבו לדון בשאלה "כמה מתמטיקאים חדשים מביאים, שניים או שלושה, ומה רוצים לפתח, כימיה מתמטית או מתמטיקה כימית", בסוף הביאו מישהו שמומחה לפרקולציה. אחרי שעה שאנחנו יושבים שם, הייתה דפיקה על הדלת ושלושה מלצרים נכנסים עם מגשים עם סנדוויצ'ים. זה ההבדל בין פילוסופיה ומתמטיקה, החליטו משום מה שמתמטיקה היא מדע טבע ולא מדע רוח וכך ניצלו מהגורל שלנו." —פרופ' שטיינר בפתיחת הקורס.

אם יש בעיות בנוגע לסילבוס אפשר לשלוח בדוא"ל בקשה לעזרה. אנחנו קוראים רק ספר אחד, ההרצאות של ויטגנשטיין בקיימברידג' 1939, כל שבוע יש תרגיל ושאלה שאנו צריכים להשיב עליה. הסילבוס הוא באנגלית, היות שזה קורס בינלאומי, אבל ניתן לענות בעברית. לא חייבים לעשות את כל התרגילים, אבל אפשר להשמיט ארבעה מהם. התרגיל חייב להיות מוגש לפני השיעור. אם עושים את כל התרגילים אז מושמטים הציונים הנמוכים. ישנה עבודת סוף־קורס, נדבר על העבודה הזו יותר מאוחר, הציון הסופי הוא 50% העבודה בסוף הקורס ו־50% התרגילים כממוצע משוקלל.

ספר הקורס: Ludwig Wittgenstein, Lectures on the Foundations of Mathematics, Cornell University Press, Ithaca (1976). מומלץ לקנות אותו ב־Amazon או רחמנא ליצלן להשיג עותק סרוק מהמרשתת.

שיעור השלמה יתקיים בשמונה בפברואר. תצא הודעה.

בנוגע לעבודת סוף הקורס. כל אחד יכול להתייעץ עם פרופ' שטיינר ולהציע נושא והוא ייאשר. אם רוצים להגדיר את העבודה כעבודה סמינריונית, אזי כדי להיעזר בספרות משנה על ויטגנשטיין (ויש הרבה). לגבי ציות לכללים, יש לקרוא את הספר של שאול קריפקה. אפשר לבדוק אם מתמטיקה מתקדמת מתאימה לתיאור של ויטגנשטיין למתמטיקה אלמנטרית או נושאים אחרים בסגנון. בנוגע לשאלת "מה היקף העבודה?", פרופ' שטיינר עונה שזה שונה מבחינתו ממה אורך העבודה בעמודים. זה לא מעניין אותו במיוחד, הוא מקווה שנוכל להגיד משהו ב־15 עמודים, גופן דוד 14 ורווח של שורה וחצי. "מי שמבין יכול לקצר, מי שלא מבין גם זה לא יספיק לו". פרופ' שטיינר מקווה שתהיה מחשבה עצמית, "לא צריכים להגיע לאמת, שהיא מה שאני אומר", אפשר גם לתקוף את מה שפרופ' שטיינר אומר. ניתן להגיש עד דצמבר הבא, אך כדאי להגיש קודם. בעבודה יש לשאול שאלה, ואז לענות עליה לפי הטקסט עצמו. בעבודה סמינריונית יש גם לראות מה אמרו עליה אנשים אחרים.

2 שיעור ראשון

"קראתי את המאסטרים הגדולים, ולא את תלמידיהם" —נילס הנריק אבל

הטקסט אשר אנחנו נקרא אותו הוא טקסט שלא נכתב על ידי ויטגנשטיין. ב־1939 ויטגנשטיין לימד סמינר מיסודות המתמטיקה באוניברסיטת קיימברידג' בבריטניה, הוא לימד את הסמינר במעונות שלו כי הוא תיעב את חיי הקמפוס. נורמן מלקולם, אחד הסטודנטים, תיאר שויטגנשטיין דיבר רוב הזמן, שתק שתיקות ארוכות ושההרצאות עייפו את ויטגנשטיין ושהם הלכו יחדיו לסרטי סוג ב' כדי להרגיע את המוח (בניגוד לדיוויד היום, ששיחק שש־בש לצורך יחסים בין־אישיים, שניהם ראו את הפילוסופיה כמאבק נגד אמונה תפלה).

מי היה בסמינר? רובם אנשים לא מוכרים, "פילוסופים סוג ב'", כי את התלמידים הטובים שלו הוא שלח למקצועות אחרים כרפואה. אחד הנוכחים היה אלן טיורינג שבניגוד לאחרים נהג לפתוח את הפה שכן הוא החזיק עמדות שויטגנשטיין התנגד להם, ויטגנשטיין דווקא העריך את הביקורת הזו ובפעם אחת שטיורינג לא הופיע לשיעור — ויטגשנטיין ביטל את השיעור. הפילוסוף ארנסט נייגל טען שהאווירה הייתה יותר כמו כת, שכן ויטגשנטיין לא סבל התנגדות, פרט כנראה למקרה של טיורינג.

ויטגנשטיין דיבר ללא כל רשימות, ולכן ההרצאות אינן מופיעות אצלו בכתובים. ארבעה אנשים סיכמו את ההרצאות, והם Bosanquet, Malcolm, Rhees, Smythies. ההרצאות יצאו בהוצאת Cornell University Press. הסיכומים לא תמיד מסכימים אחד עם השני והייתה מלאכת עריכה לא־לגמרי־מדעית.

יתרונות של הספר על פני חומרים אחרים שיצאו לאור על ידי ויטגנשטיין עצמו כוללים את הבהירות בספר שכן ויטגשנטיין נאלץ להבהיר עצמו לתלמידים. זהו פירסום של תקופה קריטית בהתפתחות הפילוסופית שלו, והפרסום הראשון בנושא דעותיו על מתמטיקה לאחר "המהפכה השקטה" שלו (לדברי המרצה) של 1937. על ידי חקירת כתבי ויטגנשטיין שכיום קיימים רק על דיסק מיושן, טוען פרופ' שטיינר שבבקתה בנורווגיה, במהלך סערת־רגשות אינטלטואלית, רוחנית ומינית, עבר ויטנגשטיין מהפכה. זוהי אינה מהפכה בין ויטגנשטיין המוקדם והמאוחר, קרי בין הטרקטטוס לבין החקירות הפילוסופיות, אבל מהפכה של ויטגשנטיין המאוחר. ויטגנשטיין מעולם לא התייחס לכך כמהפכה, אבל מהמחברות ניכר שהוא היה מודע למחשבותיו המהפכניות בנוגע למתמטיקה. הוא הרגיש כאשה בהיריון אשר משהו מונע ממנה להוליד את המחשבות החדשות.

המהפכה נוגעת לקשר בין מתמטיקה לבין היישומים. טרם המהפכה היישומים היו אמורים "לדאוג לעצמם", בכך הוא התכוון שמשמעות טענה מתמטית אינה ניתנת על ידי היישום ואין קשר מהותי בין מתמטיקה ליישומיה. למעשה, הוא חשב כי ההוכחה היא הנותנת את המשמעות. הוא אף דחה מכל וכול את הרעיון שקיימות שתי הוכחות שונות לאותה טענה מתמטית. נניח, שבע ההוכחות השונות של גאוס למשפט היסודי של האלגברה הן למעשה שבע הוכחות לשבעה משפטים שונים. לאחר המהפכה היישומים היו הכרחיים למשמעות המתמטיות של הטענה. מבחינה פילוסופית ויטגנשטיין ניסה לייצר דוקטרינה שתיתן דין־וחשבון לשימוש המתמטיקה כדי לנבא סדירויות אמפיריות, אבל מבלי להפוך את המתמטיקה עצמה לאמפירית. המתמטיקה אינה פיזיקה, אבל אינה מדע אמפירי, לכאורה אי־אפשר להפריך טענה מתמטית על ידי מה שקורה בשמיים. מצד שני, ידוע שמתמטיקאים ופיזיקאים משתמשים במתמטיקה כדי לנבא מה יהיה בשמיים, יש כאן שני אספקטים של מתמטיקה הסותרים זה את זה.

היו פילוסופים גדולים שניסו ליישב את האספקטים האלה, עמנואל קאנט שהתעסק בנושא המציא דוקטרינה הקרויה סינתטי א־פריורי, וזה חלק מהותי מ־"ביקורת התבונה הטהורה"; פילוסוף נוסף שניסה ליישב בין האספקטים של המתמטיקה היה אפלטון, אפשר לראות בתורת האידאות של אפלטון כהסבר היישום במתמטיקה — אפלטון ראה את המתמטיקה כמדע אידיאלי ומצד שני ידוע שבלי מתמטיקה אי אפשר לנצח במלחמות ובעקבות כך אפלטון פיתח את מושג "השתתפות", שבו העולם האמפירי השפל איכשהו משתתף במתמטיקה, יש מספיק משותף בין האידיאות המתמטיות לעולם השפל שנוכל להשתמש במתמטיקה כמשהו אידיאלי כדי לנבא מה יהיה בעולם האמפירי. שני גדולי עולם בפילוסופיה התלבטו בשאלה איך מתמטיקה היא גם א־פריורי, וגם סינתטית. ויטגנשטיין היה עסוק באותה שאלה עצמה, אך הכיוון שלו היה שונה באופן רדיקלי, אך דומה יותר לקאנט מאשר לאפלטון בדעתו. יש דואליזם אצל ויטגנשטיין במתמטיקה שמסביר איך מתמטיקה היא גם יישומית אך אינה אמפירית. אחרי המהפכה, ויטגנשטיין ראה את היחס בין מתמטיקה וישומיה בצורה שונה ומהותית יותר. ויטגשנטיין אף אומר שמתמטיקה מספקת כללים, בדומה לקאנט. תפקיד ההוכחה לאחר המהפכה השתנה לחלוטין, ואנו צריכים למצוא לה תפקיד.

הרעיון הראשי שנרצה להדגיש אצל ויטגנשטיין היא שהמתמטי אכן קשורה לעולם האמפירי, שכן היא מבוססת על סדירויות אמפיריות. חוק טבע תקף תמיד ואין לו יוצא מן הכללת אך מתחת לו יש סדירויות אמפיריות, שבהן תיתכנה סטיות לדוגמה במדידות פיזיקליות יש סטיות במדידה. אבל במתמטיקה, אם אתה הופך את מה שקורה כל הזמן לכלל או לנורמה, אז הגעת למתמטיקה. למשל, בהינתן משולש, רוב הזמן אם נמדוד את זוויותיו נקבל 180°, ויש סדירות אמפירית שבה כל פעם שנמדוד נקבל אותה התוצאה. מכאן נכון לומר שבמשולש הסכום הוא 180° ואם לא הגעת לכך, אזי יש משהו דפוק פה, והקריטריון להגיד אם משהו דפוק הוא המתמטיקה. מצד אחד יש פה כלל, שהוא לא אמפירי, אי אפשר להפריך כלל מתמטי כמו שאי אפשר להפריך כלל אתי. כלל הוא האידיאל, הנורמה, ולכן לא אמפירי. מצד שני, אם לא הייתה כאן סדירות אמפירית מאחורי הכלל, אז לא היה כלל. לפני 1937 הכללים הם כללי דקדוק, אין בכלל סינתטי—א־פריורי שם, מה משפט שבנוי כהלכה וכו', הטבע והניסיון לא יכולים להשפיע על כללי דקדוק, אחרי המהפכה ויטגנשטיין סבר שכללי המתמטיקה לא דומים לכללי דקדוק שכן הם מבוססים על סדירויות אמפיריות, שלא כמו כללי דקדוק.

3 שיעור שני

"מתמטיקאי הוא זה הקורא לדברים שונים באותו שם" —פואנקרה, כפרפרזה על הציטוט "משורר הוא הקורא לאותו הדבר בשמות שונים".

נשאלת השאלה, "כמה מתמטיקה ויטגנשטיין ידע?", עלו ביקורות על כך, והוא אף מתחייב לא לדבר על אף נושא מתמטיקה שגבוה מחומר של בית־ספר תיכון. יש ענווה מסויימת בטענה שלו עצמה, במחברות של ויטגנשטיין מצאו כמה עיונים באנליזה (מהזווית הקונסטרוקטיבית. לדוג', המרה של הוכחה לא קונסטרוקטיבית של הוכחת אוילר בנוגע לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים להוכחה קונסטרוקטיבית). בהרצאות אלה הוא מדבר רק על אריתמטיקה וגאומטריה, והנושא המתקדם היחיד שהוא מדבר עליו הוא תורת הקבוצות, שהוא מגנה אותה. אבל הוא אומר, שמבחינה פילוסופית הבעיות הקשות עולות באריתמטיקה, אם כי, לא כל הבעיות

בפילוסופיה של המתמטיקה עולות בתורות הפשוטות כגון אריתמטיקה או גיאומטריה. פרופ' שטיינר מוסיף שיש שאלות מעניינות שעולות מיישום מתמטיקה ממדעי־הטבע, שעולות מנושאים יותר מתקדמים במתמטיקה, ובגלל זה ויטגנשטיין קצת פספס את הבעיות האלה, אבל זה לא גורע ממנו שום דבר. בספר Remarks on the Foundations of Mathematics (שנתייחס אליו מפעם לפעם, הוא "צימוקים" שלקחו מהמחברות של ויטגנשטיין, הוא לא הכין בכלל, לא רק לדפוס אלא בתור ספר), יש עיונים באנליזה ממשית כפי שהציג המתמטיקאי גוטפריד הארדי, גדול המתמטיקאים הבריטים במאה ה־20, שספרו על אנליזה היה הספר החשוב והפופולארי ביותר במתמטיקה בתקופה הזו, בספר הוא בין הייתר הציג חלק מהתורות המתמטיות ביבשת אירופה אל הבריטים, כגון תורת הקבוצות או אלגברה מופשטת ואנליזה. לויטגנשטיין היה עותק של אחת ממהדורות הספר, ובשוליים אף הוא העיר הערות פילוסופיות בכתב ידו, לפחות אפשר לומר שהוא הבין את הספר.

הביקורת שיש לויטגנשטיין נגד תורת־הקבוצות ונגד האנליזה המופשטת היא שאין להם יישומים, או שיש להם יישומים מדומים. הביקורת שלו עלתה גם נגד ניסיון לבנות את כל המתמטיקה על יסוד אחד, כמו בנייתו של קנטור או חתכי דדקינד, שכן לדעתו אין צורך בבניית המתמטיקה על יסוד. הוא אמר שאפשר לעסוק באנליזה על ידי הצבה על אקסיומות נדרשות, ולא נדרש ביסוס על תורת הקבוצות כחתכי דדקינד.

3.1 התנגדות לרוויזיוניסטיות — Nonrevisionism

אין זה מתפקידה של הפילוסופיה להתערב במתמטיקה, כך פותח ויטגנשטיין את הרצאתו הראשונה. זו טענה מאוד שנויה במחלוקת, שכן פילוסופים תמיד התערבו במתמטיקה (דוגמת ברקלי ו־"האנליסט" שלו, שבו הוא יוצא נגד החדו"א הבסיסית של לייבניץ וניוטון, ביקורת שהובילה לפיתוחו מחדש עם יסודות פחות רעועים) ומתמטיקאים אף התערבו בפילוסופיה (נניח האינטואיציוניסטים שהתנגדו לכלל שלישי מן הנמנע, הכלל הקובע שלכל טענה P מתקיים "או P או $\neg P$" — או שהטענה נכונה או שהיא שגויה). ויטגנשטיין טוען אפוא שאין זה מתפקידה של הפילוסופיה להתערב במתמטיקה, ולכן הוא יתנגד לאינטואיציוניסטים שפסלו משפטים מתמטיים בשל טענות פילוסופיות, למעשה, הוא אף טוען שלמתמטיקאים אסור לנבא מה אפשר יהיה לעשות, ובכך לכאורה נגד משפט האי־שלמות של גדל, משפט הקובע שיש טענות מתמטיות שלא ניתנים להוכחה או הפרכה במערכת המתמטית המקובלת של צרמלו־פרנקל. זאת ועוד, יחסו למשפט אמנם לא דיכוטומי, אך הוא לא ראה בו אף חשיבות פילוסופית שהיא. ב־"חקירות הפילוסופיות" הוא טוען שאין המתמטיקה יכולה לטעון לפילוסופיה[1], ובכך יוצא נגד רוב דעת־הקהל שראתה במשפט האי־שלמות של גדל תרומה לפילוסופיה. ויטגנשטיין אמר בתחילת הרצאתו הראשונה שהוא אינו מתכוון לתת פירוש חדש למתמטיקה, אבל כן ייתן פירושים לסמלים ומלים מתמטיים, ואם הוא ייתן כאלה הוא רק יראה שכל הפירושים שרירותיים. ב־"חקירות הפילוסופיות" הוא מדבר על "תמונות", הוא מצייר תמונות, אבל המטרה שלו היא להיפטר מכל התמונות. הוא מזכיר לפרופ' שטיינר את הפילוסוף סקסטוס אמפיריקוס (Sextus Empiricus) שהיה אף קיצוני יותר, כל טענה שאדם יכול לטעון גוררת את ההיפוך של אותה טענה לדעתו, ולכן לא כדאי לטעון טענות. אכן, מכך נובע שגם טענה זו חסרת־ערך, אך היא נטענת רק כדי שאחרים יפסיקו לטעון טענות. ויטגנשטיין מנסה לגרום לכך שלא תטען טענות פילוסופיות על המתמטיקה.

ויגטנשטיין יוצא חוצץ נגד ענף מתמטי הקרוי "Foundations of Mathematics", מעיין ענף שהוא פילוסופי־מתמטי. לדעתו, אם זה פילוסופי זה לא מתמטי, ואם זה מתמטי זה לא פילוסופי. שאלת יחסו של ויטגנשטיין למשפט האי־שלמות של גדל מורכבת. משפט גדל הוא משפט מתמטי עמוק עם השלכות לכאורה לפילוסופיה, אך מתמטית גרידא הוא בגרסתו הפשוטה ביותר לא חשוב, הטענה שאליה גדל מתייחס היא חסרת חשיבות מתמטית שכן היא נתפרת במיוחד לצורך ההוכחה. לאחר הוכחתו של גדל נמצאו משפטים מתמטיים חשובים שהם לא יכיחים, כגון "השערת הרצף" של קנטור (הוכח על ידי גדל וכהן) מה שכן מוביל לחשיבות משפט גדל.

3.2 מתמטיקה ושפת היומיום

ויטגנשטיין מתכוון לדבר על הממשק בין המתמטיקה לשפת היומיום: מושגים כגון "הוכחה", "מספר", "סדרה" וכדומה. איננו יכולים לפתור בעיות במתמטיקה ובפילוסופיה על ידי שינוי מלים בשפה, על ידי הפיכת השפה לשפה טכנית, כמו מה שקורה בפיזיקה. בכך ויטגנשטיין יוצא נגד חלק מההוגים הגדולים של הפילוסופיה המודרנית. ברטראנד ראסל, שהוא גם פילוסוף וגם מתמטיקאי, טען שניתן לפתור את בעיות הפילוסופיה על ידי יצירת שפה לוגית מושלמת. דברים דומים חושב גם קוויין (Quine). בעיות פילוסופיות נגרמות לעתים קרובות כאשר מלה מקבלת שתי משמעויות בשפה. בפילוסופיה ובמתמטיקה ישנם "מספרים", ב־"חקירות פילוסופיות" מוזכרים "טבעי", "ממשי", "מדומה", "על־סופי", זה גורם לנו לחשוב לכל הדברים האלה יש משהו משותף.

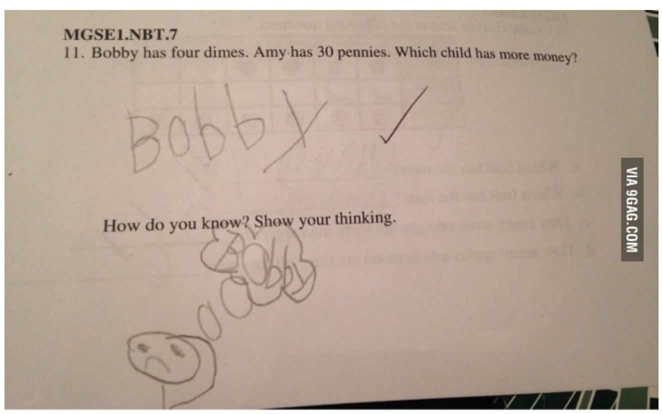
[1] הציטוט: "124. Philosophy may in no way interfere with the actual use of language; it can in the end only describe it."

"מהות המספר". אבל תורת קנטור באה כדי להבהיר את המהות של המספר, אז חושבים שיש לכך מהות. ויטגנשטיין לא אהב את קנטור, בלשון המעטה, ויש מי שאומר שפרט לתיעוב הפילוסופי שיש לו לאדם שעושה בדיוק ההפך ממה שצריך לעשות, אלא כי הוא גם היה יהודי משומד.

היחס בין דברים מתמטיים לבין יישומיהם הוא עניין חשוב ונחשף לראשונה ב־1939, לאחר "המהפכה השקטה" שלו. למשל הוא מביא את המושג של "מספרים מדומים" — "Many intelligent people were shocked when the expression 'imaginary number' was introduced. They said that clearly there could not be such things as number which are imaginary; and when it was explaind to them that." כשהסבירו לאנשים שמדומה אינו במובן הרגיל של המלה, יש בלבול, משתמשים בביטוי מהקשר אחד ומיישם אותו בצורה אחרת, מבלבל אנשים. "מספר מדומה", אתה מחבר את התחשיב הישן עם התחשיב החדש. ויטגנשטיין אומר דבר מאוד אפייני לתקופה שלו שם, הוא אומר שהעניין של התחשיב של ה־"מספרים המדומים" האלה, יש לו חשיבות ביישומים בפיזיקה. לעתים כשמוצגות לנו תוצאות כאלה אנחנו מסוחררים, אבל הוא יורד כאשר אנחנו מבינים את הפער בשפה.

על כך ויטגנשטיין אומר דבר מאוד חמור, והוא שיש תורות מתמטיות שבהן הסחרור אף פעם לא יורד, ואולי בגלל זה, המציאו את התורה (והוא מתכוון בכך לתורת הקבוצות של קנטור). אין לתורות האלה שום יישומים בפיזיקה. באופן כללי, ויטגנשטיין רוצה פה לומר, שכדי להבין ביטוי יש להבין מה שימושו. איך יודעים אם מישהו מבין משהו? עלינו לבדוק איך הוא משתמש בו בפועל. יוצא מכאן שאחד המושגים הכי חשובים בפילוסופיה של ויטגנשטיין במתמטיקה הוא "הציות לכלל". מה זה לציית לכלל? אם נבין את זה, נבין את המתמטיקה, כך הוא חושב. ו־"איך אני מציית לכלל x ולא לכלל y?". נניח אדם המונה $3, 5, 7$, ניתן לשאול האם הוא מונה מספרים "אי־זוגיים" או "מספרים ראשוניים אי־זוגיים". הדרך לבדוק את זה, היא להכריח אדם להמשיך כדי לבדוק את היישום של הכלל.

4 שיעור שלישי



הבנה אינה רגע מנטלי, טוען ויטגנשטיין, אלא היא הציות לכלל. מתוך מבחן במתמטיקה לתלמידי כיתה א' בג'ורג'יה, ארה"ב.

4.1 מהי הבנה?

בהרצאה השנייה עיקר הדגש עובר לציות לחוק. מי ששם דגש על הנושא הוא קריפקי. הקשר לפילוסופיה של המתמטיקה הוא שטיעונים מתמטיים הם כללים (דבר שיעלה בהרצאות הבאות), על כן שאלת הציות לכללים חשוב לפילוסופיה של מתמטיקה. ויטגנשטיין עסק בנושא עוד בתחילת שנות ה־30. הוא התנגד לרעיון שהבנה של כלל היא איזושהי מצב מנטלי, מצב רגעי של המציית לכלל. ויטגנשטיין בחן את המלים "intend", "understand" ו־"mean", דקדוקן דומה וניתן להשתמש בהן גם למשהו שקורה בהווה וגם למשהו שיקרה בעתיד. לכן ניתן לשפוט לפי מצבו של אדם או לפי התנהגותו בעתיד. ניתן לשאול, אם כן, מה קורה כאשר שני הקריטריונים האלה לא מתרחשים במקביל — לדוגמה, ישנו מצב מנטלי אבל אין פעולה בעתיד.

מושג חשוב נוסף הוא "determination" — באיזה מובן כללים, נוסחה וכו', קובעים את התשובה הנכונה לתרגיל מתמטי. כללי החיבור שלומדים בבית־הספר היסודי, קובעים במובן מסויים את החיבור של כל המספרים השלמים גדולים ככל שיהיו, הכול נמצא בתוך האלגוריתמים שנלמדים בבית־הספר. אבל, השאלה היא איך זה אפשרי? במה הכלליים האלה קובעים תשובה לתרגילים שהתלמיד לא חשב ולא יכול אפילו לחשוב עליהם.

בדוגמה אחרת, האם הכלל לפיתוח המספר π בפיתוח עשרוני, קובע את האקראיות של המספר (מה שקרוי "מספר נורמלי")?[2].

לפילוסופיה יש שתי גישות לקביעות מתמטיות:

1. מנטליזם: כיוון שאנחנו קיבלנו את הכלל (לפיתוח π למשל), אז זה מחייב אותנו לכל היישומים, מכאן ועד להודעה חדשה. המצב המנטלי של המתמטיקאי שמדבר על המושג של פיתוח π, המצב המנטלי הזה מקפל לתוכו את כל מה שהוא צריך לעשות בעתיד (ולא בהכרח למה שהוא עושה בעתיד).
2. פלאטוניזם: החוק המופשט מחובר בעולם האידיאלי של המתמטיקה ליישום מופשט.

שתי הגישות נדחות על־ידי ויטגנשטיין לחלוטין והן נחשפות לפרדוקס הציות לכללים שהתפרסם בעיקר ב־"חקירות הפילוסופיות". נגיע לפרדוקס בהמשך.

ההבנה (understanding), אנחנו מתייחסים גם למה שאדם חווה עכשיו וגם למה שהוא יישם אחר־כך. ויטגשטיין אומר כנגד הפילוסופיה האקדמית: "If it is true that you can understand a symbol *now*, and that means you can apply it property—then, one is inclined to say, you must have the whole application in your mind."[3], במקרה האינסופי זה כלל לא אפשרי, וגם אם נניח שבמקרה סופי יש בראשך את כל החוקיות, עדיין לא בהכרח נובע מכך שתנהג כהלכה לעתיד בעתיד, ייתכן שתפרש את הכלל בראשך באופן שונה.

4.2 סדירויות אמפיריות

"The use of the word “understand” is based on the fact that in an enormous majority of cases when we have applied certain tests, we are able to predict that a man will use the word in question in certain ways. If this were not the case, there would be no point in using the word ‘understand’ at all". ההבנה היא איננה מצב מנטלי, אומר ויטגנשטיין, יותר נכון, ההבנה כולה איננה רק מצב מנטלי. מצב מנטלי יכול להיות קשור לזה, אבל זה צריך להיות קשור גם ליישום הטבעי. התובנה שאני מוצא כאן היא היסוד של כל המושגים דו־קריטריוניים, כמו "להבין", "לציית לכלל", "לתכנן", "להתכוון" — כל אלו מבוססים על סדירות אמפירית. ההבדל בין סדירות אמפירית לחוק הוא שחוק הוא בל־יעבור, בעוד שסדירות אמפירית סובלת יוצאים מן הכלל, ובלבד שהסטייה תהיה קטנה. יש לנו אפשרות לנבא מה הבנאדם יגיד, אך איננו צריכים לדעת מה יש במוחו. על כן, המושג של הבנה רלוונטי לחיינו רק בשל הקשר שלה לסדירויות אמפיריות.

ויטגנשטיין מדבר על עובדה — כשאנשים לומדים כלל מתמטי, הם מיישמים אותו באותה צורה. אם זה לא היה נכון, אז למושג ההבנה לא היה שום תוקף. הציות לכלל נגזר מהסדירות האמפירית, אחרת לא היינו יכולים לדבר כלל על ציות לכלל או הבנה. אבל לכלל יש גם עניין נורמטיבי של "נכון" או "לא נכון". ויטגנשטיין מסביר שכיוון שסדירות אמפירית אינה 100%, אבל רוב הילדים כן הולכים בתלם, אז זה מספיק כדי להכניס את הרעיון של הבנה, אבל ציות לכלל הוא נורמטיבי, בעוד לסדירות אמפירית אין הפרה. אנחנו מלבישים את הכלל על הסדירות האמפירית. הסדירויות האמפיריות מאפשרות לנו לדעת לאיזה כלל האדם מציית. אם ראינו אדם אומר "3 5 7", אז זה אולי לא מספיק, אבל רובנו היינו מנבאים שהוא יגיד "9" אח"כ, על־אף שמי שיודע מתמטיקה עשוי להגיד "11" ולא "9" (כסדרת המספרים הראשוניים האי־זוגיים).

עלתה שאלה לגבי שאלות מתמטיות בהם רוב האנשים לא בהכרח יצדקו, ולכן יש בעיה בסדירות. לדוגמה, פרדוקס מונטי־הול, או השאלה אם $10^{10^{10}}+1$ הוא מספר ראשוני. כאן אין אפשרות לבן־תמותה להמשיך בסדירות אמפירית עד גדלים אדירים. הפתרון הוא הלבשת המושגים על המושגים המוכרים, כדי להתקדם הלאה. אבל לפי ויטגנשטיין, איפה שאין סדירות אמפירית, אין כלל. הפילוסוף לפי ויטגנשטיין צריך פשוט לקבל שיש סדירויות אמפיריות, ועל זה אנחנו נותנים דין־וחשבון על החלק הנורמטיבי של החיים.

זה פרדוקס הציות לכלל, שהוא לא פרדוקס אלא אד־הומינם של הפילוסופים האקדמיים. ברגע שתנסה לבדוק ציות לכלל לפי מצב מנטלי, לעולם לא תדע לפי איזה כלל האדם פועל. העובדה המוצקה הבסיסית היא שרוב בני־האדם מצליחים ליישם את הכלל כהלכה.

5 שיעור רביעי

”רבים סבורים שמתמטיקה היא אוסף של משפטים. עבורי, מתמטיקה היא אוסף של דוגמאות. משפט הוא טענה על אוסף דוגמאות, והשאיפה להוכחת משפט היא להבהיר ולהדגים את הדוגמאות"

[2] קיימים כללים רציונאליים לפיתוח π. לדוגמה הזהות: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ שהוכחה על ידי אוילר.

[3] הרצאה שנייה, עמוד 23.

—ג'ון קונוויי.

5.1 היקבעות

מושג ה־"היקבעות" (Determination), במיוחד באופן שבו הוא מופיע במתמטיקה, מעסיק מאוד את ויטגנשטיין, במיוחד כי הוא מנסה להימנע ממושגים מטאפיזיים. יש סוג נוסף של היקבעות שלגמרי מופשט מהאדם, שהוא הקשר בין $2+2$ לבין 4, שאינו קשור למה שהאדם עושה או לא עושה. הרעיון הזה הוא באמת סוג של אפלטוניזם ("אפלטוניזם של כללים" לפי פרופ' שטיינר, שהוא יותר מעניין מאשר "אפלטוניזם של עצמים"). במתמטיקה אין "ישים", אם אתה מקבל את האקסיומות אזי נאמר שמשפט מסוים "נובע". עבור ויטגנשטיין, הדרך הזאת היא לא יותר טובה מהאפלטוניזם, שכן המושג הזה של קביעה (לדוגמה — "המשוואה קובעת את הפתרונות") הוא יותר מסוכן מהרעיונות של אפלטון עצמו. ויטגנשטיין מוסיף שהיקבעות היא לעתים תכונה פנים־מתמטית. לדוגמה, הנוסחה $y=x^2$, נוכל לומר מכאן ש־x קובע את y אבל y לא קובע את x (שכן עבור $y=9$ ייתכנו $x=3$ או $x=-3$), אין לזה קשר למנטליזם או לאפלטוניזם, זהו סיווג פנים מתמטי של נוסחאות. לעומת זאת, כאשר מחנכים תלמידים ומראים להם את הנוסחה ושואלים אותם מה היא התשובה הנכונה להצבה $x=3$, רובם יענו $y=9$ ויתייחסו אליה כאל התשובה הנכונה. זוהי הסדירות האמפירית. זה לא רק שאדם יגיד 9 כשנגיד לו 3, אלא שהוא והמורה שלו יתייחסו אל זה כאל התשובה הנכונה, וזוהי כבר נורמה.

המעבר בין סדירות־אמפירית לנורמה הוא מעבר שלא משגיחים בו, אבל ויטגנשטיין מאוד מעוניין לתת דין וחשבון על הנורמה הזו — מתמטיקה כנורמה, משפטים מתמטיים כנורמה. ברגע שאתה אומר שאלו עובדות, השאלה המתבקשת היא "עובדות על מה?" מגיעים ישר לאפלטוניזם או מנטליזם. הנורמות במתמטיקה (וגם בדקדוק, באופן דומה), יש אינטרס לצמצם את הסטייה מהסדירות, הבעיה עם הסדירות האמפירית היא שאינה חוק בל־יעבור, ולכן החברה משליטה נורמות. כשמורה מלמד את הכיתה, הוא מלמד את הנורמה לפי הסדירות האמפירית. מעבר להגדרת "מה שכולם עושים" כ־"נכון", במתמטיקה קיים מושג ה־"הוכחה". זוהי אחת הדרכים של החברה לשכנע אנשים שיעשו אותו הדבר. בשום מקצוע אחר פרט למתמטיקה אין מערכת סדורה של הוכחות שאמורה לשכנע את האדם. יש לכאורה "כוחניות" במושג ההוכחה. אנחנו רואים במושג ההוכחה איזשהו הכרח, שמחייב אנשים להסכים למה הדבר הנכון. אליבא דויטגנשטיין, מתמטיקה אינה אמפירית, היא נורמטיבית, אבל היא מיוסדת על סדירויות אמפיריות. עולות מכך שאלות רבות, לדוגמה — מה עם סדרה ארוכה שבה הסדירויות האמפיריות מתפוגגות? (נחקור זאת בהמשך).

5.2 טענות מתמטיות והוכחות מתמטיות

בתחילת שנות ה־30, ויטגנשטיין האמין שטענות מתמטיות הן כללים עבור ביטויים מסויימים, כמו $x, +, \ldots, 1, 2, 3$ וכדומה. בהמשך זה עדיין תקף עבורו, אך טבע הכללים השתנה. ויטגנשטיין בהרצאה השלישית מגלה את התורה החדשה שלו, איך המתמטיקה הא־פריורית מתיישמת בעולם האמפירי. לפני 1937 ויטגנשטיין לא חשב שלדבר על היישומים של המתמטיקה הוא חלק מהעיסוק של הפילוסופיה של המתמטיקה, אך כל זה השתנה. חלק מהטענות הן מתמטיות, אך טענות המכילות סמלים מתמטיים אינן בהכרח מתמטיות. טענות מתמטיות המכילות סמלים מתמטיים הן כללים לשימוש בסמלים בטענות שאינן מתמטיות. הפיכת המתמטיקה לרצף של גזירות לוגיות ופסוקים לוגיים מנתקת את המתמטיקה מהיישומים האמיתיים שלה, ולכן ויטגנשטיין לא רואה זאת בעין יפה. הביקורת שלו היא בעיקר על תורת הקבוצות, שמבחינתו היישומים העיקריים שלה הם "הדפסה על טפטים" את הטענות המתמטיות, באופן כללי יש דעה מוצקה במתמטיקה נגד תורת הקבוצות.

בעקבות טענות מתמטיות, עלינו לדבר על הוכחות מתמטיות:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 36 \\ \hline 126 \\ 63 \\ \hline 756 \end{array}$$

מה היישומים של $36 \cdot 21 = 756$? דוגמה שניתנת היא שאם נבנה מלבן באורך 36 ריבועים וברוחב 21 ריבועים, ונספור את הריבועים בדרך רגילה, אזי המספר שנקבל הוא 756. במספרים גדולים יותר כבר לא תהיה סדירות־אמפירית, הכלל יכול להיות תקף אך השאלה היא מה הרלוונטיות של הכלל הזה. אם הכלל אינו רלוונטי, זו כבר לא מתמטי. אם כך, איך עושים מתמטיקה במספרים אסטרונומיים? זאת על ידי הלבשת מושגים חדשים על המושגים הישנים באופן שיוסבר בהמשך. בנוסף לכך, חשוב לנו לזכור את ההנחה המובלעת, והיא שהמספרים לא משתנים תוך כדי ההוכחה, ושכל פעם שנוכיח אנחנו נקבל אותה תוצאה ונדבר על אותו הדבר. זו שאלה שרלוונטית גם לגיאומטריה, שבה עלינו לדאוג שהציורים לא משתנים תוך כדי, שאלה שג'ון לוק

העלה ולא מצא לה תשובה. ויטגנשטיין עונה לשאלה בכך שאומר שאם זה משתנה, זו כבר לא שאלה מתמטית. ויטגנשטיין שואל האם נקרא למצב בו כל פעם נקבל מספרים שונים "הוכחה", טיורינג עונה לו "It would be a bad proof" וויטגנשטיין עונה "A bad proof of *what*?", זה לא נותן ישום בפיזיקה, זה לא יאפשר לספור ריבועים כהלכה, זה לא יוכיח מאום, לדעת ויטגנשטיין.

ניתן לשאול האם ייתכן שנקבל מצב בו יש הוכחה, אך טרם מצאנו לה תואם במציאות. פרופ׳ שטיינר מסביר שכן, ונותן כדוגמה את אלגברת הקווטרניונים של המילטון, שבאה כניסיון למדל פיזיקה תלת־ממדית באמצעות ארבעה משתנים אך נכשלה בשל העובדה שסיבוב מלא באלגברה הזו מניבה תוצאת שלילית. רק עשרות שנים אח"כ התברר שהאלגברה הזו מתארת את האלקטרון, שבשל הספין שלו, הוא מתואר כהלכה על ידי הקווטרניונים. ויטגנשטיין כנראה היה מקבל את זה, שכן ניתן היה למצוא לאלגברה הזו שימוש (על ידי התעלמות מסימן המינוס ועבודה כל הזמן בסימן פלוס), ולכן כנראה שהיה מקבל זאת.

ויטגנשטיין קושר בהמשך בין הוכחה ליישום: "We call these things proof because of certain applications; and if we couldn't use them for predicting, couldn't apply them, etc., we wouldn't call them proofs.". בכך הוא יוצא מהארון בתפישה החדשה שלו לגבי הפילוסופיה של המתמטיקה. הסיבה היחידה שניתן לקרוא לשתי הוכחות של טענה, שתי הוכחות של אותו הדבר היא בשל היישום. זוהי מהפכה רעיונות אצל ויטגנשטיין. מכאן אין תשובה חד־משמעית לשאלה אם יש שתי הוכחות שונות לאותו משפט, זה תלוי בבני־האדם, זה תלוי ביישום.

6 שיעור חמישי

"זו תיאוריה נחמדה למדיי. אני חושב שהפגם היחיד שיש בה הוא המשותף לכל התיאוריות הפילוסופיות, היא שגויה." –שאול קריפקה.

6.1 המשמעות הכפולה של משפטים מתמטיים

ויטגנשטיין רומז לרעיון שיש למשפטים מתמטיים משמעות כפולה: משמעות אמפירית ומשמעות מתמטית. לב העניין הוא שמשפט כמו "$25 \times 25 = 625$" יש לו משמעות כפולה, אם אני מחשב משקל של עצם, למשל 25 שכל אחד מהם שוקל 25, אזי אפשר להשתמש במשפט הזה בשני אופנים, באפשרות הראשונה ניתן לנבא שיצא שהמשקל הוא 625, ואם זה יוצא לא נכון בבדיקה אזי המשפט שקרי. האפשרות השנייה היא שהתוצאה מתקבלת על ידי גזירת כללים מסויימים. דעתו של ויטגנשטיין אינה נוחה בדרך־כלל מלוגיקה מתמטית, ועל כן הוא מתרכז בעיקר בחישובים ופחות בהוכחות. הפורמליזציה של המתמטיקה, של האריתמטיקה בפרט היא תולדה של המאה ה־19, וויגטשנטיין רואה בה משהו זר למתמטיקה. לטענתו, קהילת דוברי שפת המתמטיקה, הם אלו שעושים את האמת (במובן של "תקינות" או "אי־תקינות") אי־תלויה בניסיון האמפירי. מדובר אם כן במשהו א־פריורי במובן הקנטיאני, זאת כי "Nothing which happens will make us call it false or give it up", מעבר לכך, יש כן תלות בניסיון, שכן "You wouldn't use this calculation if things were different. "The proof of it is only called a proof because it gives results which are useful in expreience", מצד אחד האריתמטיקה היא לא אמפירית ובלתי תלויה, אך אם היא לא הייתה תואמת את הניסיון לא היינו משתמשים בה. אנחנו נראה בהמשך שכללי המתמטיקה באים על מנת לתאר את המציאות שלנו.

ויטגנשטיין אומר שהטענה "$25 \times 25 = 625$" אמיתי בשני אופנים. האם אם כן מדובר בשתי טענות, או בטענה אחת עם שתי משמעויות? נאמר שמכיוון שאנחנו משתמשים באותם סימנים לשתי המשמעויות אין זה משנה הרבה אם אנחנו אומרים שיש פה שתי טענות או לא. הדבר הזה מראה שאצל ויטגנשטיין מושג האמת הוא מאוד גמיש. אצל ויטגנטשיין יש איזושהי מקבילה של סינתטי א־פריורי בשל הקשר של האריתמטיקה לבין יישומיה. יש לה יישומים, אך האריתמטיקה עצמה היא לא ניתנת להפרכה. לא בשל הסיבות הגרנדיוזיות של קאנט, אלא רק כיוון שכללים לא ניתן להפריך. פרופ׳ שטיינר רואה בכל זה "נוסחה מדוללת, חלשה, של הקאנטיאניזם".

6.2 הבנייה חברתית

העמדה של ויטגנשטיין אינה מתאימה לרעיון ההבנייה החברתית. עמדה זו טוענת שחוקי המתמטיקה הם חוקים חברתיים, ואם נשנה את החברה נשנה את המתמטיקה. רבים מתומכי הגישה הזו נושאים את שם ויטגנשטיין לשווא, כי הוא אומר לכאורה שחוקים מתמטיים הם כללים. לפי פרופ׳ שטיינר, אין שחר לטענה שויטגנשטיין טען שהמתמטיקה היא הבנייה חברתית, מפני שכללי המתמטיקה שהם אכן כללים נגזרים מסדירויות אמפיריות, והסדירויות האמפיריות הופכות להיות היישומים הקאנוניים והסדירויות עצמן מוקשחות לכללים. אם זה נכון,

אז אין כללים אלטרנטיביים, יש רק שתי חלופות, או כן להקשיח את הסדירות האמפירית לכדי כלל, או לא לעשות את זה — אפשר לא לעשות מתמטיקה. אם הטענה היא אמפירית, אפשר לבדוק את זה.

כאן עלינו לשאול האם הסדירות האמפירית נועת מהבנייה חברתית? לטענת ויטגנשטיין, ללא סדירויות אמפיריות חברה לא הייתה מתאפשרת, מכאן הבנייה חברתית היא מעגלית. דרך אחרת להתבונן בזה היא העובדה שהיכולת לזהות סדירויות אמפיריות היא הכרחית ללמידת שפה, ולכן נקודת מבט יחסית לסדירויות אמפיריות שומטת את הקרקע תחת המשמעות של השפה ומחסל את עצמו מחוסר קוהרנטיות. מסיבות אלה ועוד, ויטגנשטיין איננו רלטוויסט. במתמטיקה, ההוכחה היא שגורמת לנו ליצור כלל. ראינו בעבר שההוכחה עצמה קשורה ליישום הטענה.

הסדירויות האמפיריות קשורות להשוואת יחידה כנגד אובייקטים אחרים, זוהי פעולה שאנחנו מפעילים ואז יש כלל הקובע מהו אורכו של האובייקט. לפי זה, אין שום מובן לומר, לפי ויטגנשטיין, על יחידת האורך כמו המטר הסטנדרטי שהוא "באורך מטר", כי אי אפשר למדוד את המטר על עצמו. לכן ב־"חקירות הפילוסופיות" שלו הוא טוען שיש דבר אחד בעולם שאי אפשר להגיד שהוא מטר, והוא המטר הסטנדרטי. לשאלה זו נדרש הפילוסוף שאול קריפקה[4]. בספרו "שמות והכרח" טוען קריפקה שמטר הוא 100 ס"מ, ולכן הוא בוודאי מטר גם, זאת על ידי מדידה באמצעות ס"מ ובכך תוקף את ויטגנשטיין. לפי פרופ' שטיינר, כנראה שיש פה אי־הבנה, שכן דרכי המחשבה שלהם כה שונות שקריפקה לא היה יכול להבין את ויטגנשטיין. להגיד על מטר שהוא 100 ס"מ זה או סדירות אמפירית או כלל, וזהו כלל חדש כי אלו יחידות חדשות, ולצורך כך צריך סדירות אמפירית חדשה שאותה נקשיח לכלל. ויטגנשטיין דיבר על המצב לפני שמכניסים את הכלל החדש של סנטימטרים. אורך בשביל קריפקה אינו פעולה אלא גודל אובייקטיבי, בין אם מודדים ובין אם לאו, וממילא המטר הסטנדרטי בפריז הוא לא מגדיר שום דבר, אלא מכייל את אמצעי המדידה, בכך הוא פלטוניסט. ויטגנשטיין יראה את זה כמטאפיזיקה שפלה, שיש ניתוק בין "אורך" לבין "מדידת אורך", יש כאן הבדל פילוסופי שלא תמיד בה לידי ביטוי.

בסוף צריכים לשאול — "למה עושים כללים? מה אנו מרוויחים מזה? מדוע אין משאירים את המתמטיקה אמפירית?". באריתמטיקה בוודאי אנחנו רוצים לצמצם את הסטייה בהתנהגות של תלמידים, כמו בלוגיקה. סיבה נוספת היא שכאשר עושים כלל, נוח לתאר את העולם במונחים של "זה סוטה מהכלל". הוא משתמש ברעיון שמאוד מוכר בפיזיקה, תורת ההפרעות, כלומר, הפיזיקאי לפעמים רואה את התופעה כחיבור של משהו אידיאלי (למשל אליפסה) והפרעה (כמו למשל מסלולי כוכבי־לכת). הקירוב הראשון הוא לכאורה האידיאלי, "כוכב הלכת רוצה ללכת באליפסה", אך הוא נתון לסטייה. פיזיקאים אוהבים לראות את זה ככה כי יש תורת הפרעות שמאפשרת לחשב את הסטייה ובכך את התוצאה האמפירית, זה נובע אם כן מנוחיות. מכאן, מתמטיקה משרתת את הנוחיות של האדם באמצעות כללים. זה לא הכלל עצמו, הכלל לא אמפירי בגלל זה. לעומת ויטגנשטיין, אצל קאנט זה לא עניין של נוחיות. יש סיבות לאמץ את הכללים המתמטיים, אך הסיבה אינה נעוצה ישירות בנכונות האמפיריות של היישום שלהם.

7 שיעור שישי

7.1 בנייה בסרגל ומחוגה

בהרצאה הרביעית והחמישית ויטגנשטיין משתמש כעזר בתורה של בנייה בסרגל ומחוגה. תורה זו עוסקת בבניות האפשריות של צורות גיאומטריות הנבנות באמצעות מחוגה ובאמצעות סרגל נטול שנתות. מה שמפריע לויטגנשטיין שהוא אינו יכול להבחין בין תיאור מה שאפשר והוכחה שאפשר. אם ראית תיאור שאפשר לחצות כל קטע לשניים, אז יש לך הוכחה של החצייה, אך הוכחה ללא תיאור תביא אותנו למצב שאיננו יודעים על מה אנחנו מדברים. ניתן להשוות את זה לטענה "ניתן לפרק את 36 לגורמים ראשוניים".

אצל אוקלידס הניסוחים הם מודליים, הווה אומר, הניסוח עוסק ב־"אפשרי" ו־"הכרח". כשאוקלידס טוען ש־"אפשר לבנות" או "ניתן לבנות" הוא משתמש במושגים מודליים. במתמטיקה כיום לא משתמשים בזה, אלא במונחים של קיום, יותר אפלטוניסטי. דחיפה לכך הייתה על ידי פרגה, שהכניס את העיסוק בלוגיקה למתמטיקה. הנוסח הישן של "אפשר", הוא חלק מהנוסח היווני הקלאסי. זו הפרדה בין הוכחה של קיום (הנקודה הייתה אולי קיימת קודם, אך אתה הוכחת שהיא קיימת) לעומת אפשרות (אתה הראית אפשרות למשהו שלא היה קודם). היום "בנייה" היא מטאפורה (פרט לאינטואיציוניסטים, שעבורם זה מעט שונה). יש כלים, כמו מחוגה, המבוססים על עקרונות הגיאומטריה, שהם מאפשרים לנו לצייר מה קיים, או שאפשר להשתמש בגיאומטריה אוקלידית כדי לנבא מה הכלים האלה יציירו.

לא כל מה שקיים ניתן לבנייה באמצעות סרגל ומחוגה, נניח "אקסיומת המקבילים" — עבור ישר העובר דרך הנקודות A, B ונקודה מחוץ לישר C, אזי קיים ישר אחד ויחיד העובר דרך C המקביל ל־AB (לשם ההרצאה, שני ישרים הם מקבילים אם הם אינם נפגשים). בהכרח ניתן לבנות שני קווים מקבילים, כי ניתן לבנות זווית

[4] קרוי בטעות בעברית "סול קריפקי" בתרגום ספריו.

ישרה (כי ניתן לבנות ריבוע, או על ידי הבנייה של חציית הקטע שראינו), אבל זה לא נחשב, שכן לא ניתן להוכיח שמדובר בקווים מקבילים ללא שימוש באקסיומת המקבילים השקולה למשפטים שהשתמשנו.

7.2 בעיות אי־אפשרות

לא ניתן לבנות משובע באמצעות סרגל ומחוגה. כן ניתן לבנות עם סרגל מסומן (בעל שנתות), אך סרגל מתמטי חסר־שנתות לא מאפשר בנייה של משובע. העמדה של ויטגנשטיין היא שהוכחות הן למעשה תמונות. לא תמונה של איזו אפשרות, אלא שהבנייה עצמה, התמונה, היא הוכחה. כל הסיפור הזה של סדרה של נוסחאות לוגיות בנויות כהלכה לא מזיז לויטגנשטיין, הוא חושב שזה גם סילוף המתמטיקה. החדירה של הלוגיקה הפורמלית לתוך המתמטיקה, הוא רואה כקטסטרופה. עולה מזה שאלה, עד כמה ניתן ללכת עם הרעיון של הפיכת הוכחה לתמונה, ויטגנשטיין ניסה להפוך הוכחת לא קונסטרוקטיביות לקונסטרוקטיביות כדי להפוך אותם לניתנות להמרה לתמונה. האם משפטים כגון "המשפט היסודית של האלגברה" או "חוק ההדיות הריבועית" באלגברה גם ניתנים להמרה כזו, היא שאלה פתוחה.

מה עם תמונות של "אי־אפשרות" (Imposibillity)? התמונה היא הרי ההוכחה עצמה, והוכחת אי־קיום אינה מאפשרת לכאורה תמונה.

במקרה של המשובע, מתמטיקאים תרגמו את הגיאומטריה לאלגברה. האי־אפשרות לבנייה של משובע בסרגל ומחוגה נובעת מכך ש־$2\cos\frac{2\pi}{7}$ אינו ניתן לבנייה (הוא אינו שורש של פולינום ממעלה שנייה עם מקדמים רציונאליים, ואידך זיל גמור), שכן הוא השורש של הפולינום האי־פריק x^3+x^2-2x-1, פולינום מדרגה 3, שהוא הפולינום המינימלי של $2\cos\frac{2\pi}{7}$. לאחר מכן, אנחנו ממירים את ההוכחה האלגברית להוכחה גיאומטרית שקולה, ומכך ניתן לכאורה לגזור ציור. ההוכחה אמורה לשכנע אותנו לא לנסות לקחת סרגל ומחוגה ולנסות לצייר משובע כי לא נוכל לעשות זאת, ובטח לא נוכל לעשות את זה עם הוכחה.

משפט גדל טוען כי כל מערכת מתמטית הכוללת את אקסיומת פיאנו (תורת המספרים הבסיסית הכוללת אינסוף מספרים, את האיבר 0 ופעולת העוקב שנותנת לכל מספר n את המספר $n+1$. במערכת זו 0 אינו עוקב של אף איבר, שני איברים עם אותו עוקב שווים ביניהם, וניתן להשתמש באינדוקציה) תמיד יהיה משפט, פסוק, שלא ניתן להוכיח מהאקסיומות אותו ואת שלילתו, אלא אם כן האקסיומות אינן עקביות (ואז ניתן להוכיח הכול). ההוכחה היא קונסטרוקטיבית, ניתן ממש לבנות פסוק כזה שאינו יכיח. זה כמו הוכחת אי־אפשרות בגיאומטריה.

8 שיעור שביעי

ויטגנשטיין אומר, לא הרבה, אבל כמה דברים יסודיים. פרופ׳ שטיינר מכנה את זה "מהפך", במה המהפך? הקשר בין ציות לכללים והמושג של כללים במתמטיקה. כבר ב־1934–5, ויטגנשטיין סיפר בכיתות הלימוד שלו שהיכולת לציית לכללים הוא מצב מנטלי. מתמטיקה בשביל ויטגנשטיין היא שורה של כללים. מה שהשתנה במהפך הוא אופי הכללים. הכללים המתמטיים שהוא ראה בתחילת העשור הוא באופן דומה לכללי דקדוק, אך הם חסרי יישום ובוודאי לא לעולם האמפירי. העולם האמפירי משפיע על כללים מסוימים והופך אותם ליותר נוחים, אך הכללים האריתמטיים הם הכללים הקובעים את השימוש הנכון לא רק בשפה מתמטית אלא גם בפעולות אחרות כמו ספירה או מדידה.

8.1 אותו הדבר

אין משהו אובייקטיבי שאפשר להגדיר את הציות לכללים על פי "אותו הדבר". התובנה של ויטגנשטיין הייתה שאי אפשר להתקדם כך, "איך תמשיך את הסדרה? תעשה אותו הדבר שעשית עד עכשיו". חשוב לומר שויטגנשטיין איננו מטיל ספק במושג של אותו הדבר, כמו שהוא איננו מטיל ספק בציות לכללים. אי אפשר להשתמש במושג "אותו הדבר" ב־"ציות לכלל", משום ש־"אותו הדבר" הוא משהו מאוד גמיש ואין לו מובן אובייקטיבי.

כדי ללמד מישהו משהו עלינו ללמד אותו את "הכלל" וגם מהו "כלל". כאן ויטגנשטיין מעמיד עצמו בניגוד גמור לכל האסכולה של MIT, שהילד נולד עם שפה. כשאנו מבקשים מילד להמשיך ב־"אותו הדבר" עם הציות לכלל כלשהו, זה לא כי הוא מבין מה פירוש "אותו הדבר", אלא כי לימדנו אותו כבר כללים רבים והדרכנו אותו (באופן אקטיבי או פאסיבי) מהו ה־"אותו דבר" בחברה. מכאן, "אותו הדבר" מבוסס על סדירות אמפירית, כמו כל הכללים, רק שזה כלל ברמה גבוהה יותר. ויטגנשטיין רוצה לומר שטענות מתמטיות הן מקרים פרטיים של כללי חישוב. קודם כל, אמירה אחת של שאול קריפקה — "אין עובדה על החניך אשר בתוקף עובדה זו הוא מחשב נכון". הסדירויות האמיריות הן מה שאנו קוראים "נכון" או "לא נכון", החניך לא רק מכפיל מספרים אלא גם מכפיל אותם נכון. כאשר יש סטיות מהסדירות, אז החברה מנסה לחסל אותם על ידי הדרכה נוספת ("לך לפינה" או נתינת ציון נמוך). לפרופ׳ שטיינר יש בעיה עם הציטוט הבא של ויטגנשטיין — "The only criterion for his multiplying 113 by 44 in a way analogous to the exampels is his doing it in all". ראשית, “the way in which *all of us*, who have been trained in a certain way, would do it of us” זה מופרך, הרי גם המורה יכול לטעות. אנחנו, המורה, ודאי לא חושב בכיוון זה, כשפרופ' שטיינר מסתכל על איזשהו תרגיל של תלמיד הוא לא שואל את עצמו "מה אני הייתי אומר במקומו?", והוא גם לא חושב על סדירויות אמפיריות, וזה לא עלה על דעתו עד שקרא ויטגנשטיין. פרופ' שטיינר פשוט מסתכל על התרגיל ורואה אם זה נכון או לא נכון, באופן מיידי. מה כן? התלמיד עושה, אם צודק, מה שכולם עושים, וגם המורים עושים את מה שכולם עושים. זה הדמיון. מה שויטגנשטיין אומר לא יכול לשמש קריטריון כאן, כי הסדירות האמפירית אינה הקריטריון, הסדירות האמפירית היא הבסיס האמפירי ל־"כללים", "אנלוגיות" וכדומה. גם חברה. פרופ' שטיינר אומר שהוא לא מצליח לחשוב על שום קריטריון, ומדוע לדעתו אין קריטריון? כי אם הוא רואה שאדם מכפיל שני מספרים, השאלה היחידה שהוא שואל את עצמו זה אם הוא עושה את "אותו הדבר". אין פה עניין של קריטריון בכלל, לדעתו. סדירות אמפירית, לאחר רפלקציה פילוסופית, נבין שבלעדיה זה לא היה עובד.

9 שיעור שמיני

9.1 הוכחה ואמת

לוגיקנים בשנות ה־30 חקרו מערכות לוגיות, והמטרה במערכות אלו הם לבנות את המשפט המוכח. ויטגנשטיין מזכיר בהתחלה את הרעיון — "But is a proof just constructing a proposition?”. הוא מסביר ואומר שלא מספיק לבנות את המשפט לפי כללים, זה רק נותן ערך אמת. "To say proposition P is true, is just to say the same as to say P”, לא נוסף שום דבר כאשר מוסיפים "זה אמיתי". יש להיזהר כאן כאשר מדברים על פילוסופיה עכשיוית, ויטגנשטיין לא מתכוון לבנות תיאוריה של אמת בעצמו, אבל הוא מסכים עם רעיון קיים שמושג האמת לא מוסיף כאן שום דבר חשוב. פילוסופים בכל הדורות ניסו למצוא תיאוריות כלליות של האמת, או הגדרות כלליות של "אמת", (הלוגיקן אלפרד טרסקי נתן הגדרה מתמטית לאמת תוך מושג השפה, ואצלו בכל שפה יש מושג אמת משלה, הוא בחר בשפת תורת הקבוצות האלמנטרית, אבל זה לא יספק את הפילוסוף שרוצה "אמת" כללית ולא אמת בשפה). התורה של ויטגנשטיין בטרקטט מדברת יותר על מצב של התאמת העובדות למציאות, אך הוא חזר בו כעבור שנים.

פרופ' שטיינר טוען שויטגנשטיין המאוחר דחה את הרעיון של אמת יחידה שניתנת להגדרה, ולכן כשהוא מדבר על השקילות בין לטעון "P אמיתי" ובין לטעון "P", הוא מתכוון אליבא דשטיינר אלו טענות בהקשר שפתי מסויים. מכאן, אין משמעות בהתאמת התורה לאמת או לעובדות. אין לנו קריטריון עצמאי ל־"עובדות". הרעיון המתמטי של טענות המתאומות לאמת מוביל לאיזשהו מיתוס של פלאטוניזם במתמטיקה, היות שלא קיים שום דבר אמפירי שאמיתות מתמטיות יכולות להיות בתיאום עמו.

אפשר לומר שויטגנשטיין דוחה על הסף את תורת ההתאמה של האמת, וגם דוחה כל תורה של אמת בכלל (שתורת ההתאמה היא מקרה פרטי שלה). מנגד, הוא משתמש ברעיון של התאמה בשפת היומיום, לדוגמה כאשר אנו בוחנים אמת בעדות, נרצה "לבדוק את העובדות" ולבדוק אם הן "מתאימות לאמת הידועה לנו". אנחנו יודעים למה הכוונה ואיך משתמשים בזה.

המתמטיקה לכאורה אינה צומחת ואינה משתנה, האמת קיימת ויש אקסיומות, אז הכול כבר קיים שם. המתמטיקה משם איננה יצירה כי אם גילוי. אך המתמטיקאים מגלים כל הזמן דברים שלא היו ידועים קודם, או שאף לא שוערו קודם. אם נסתכל על המספר $10^{10^{10}} + 1$ ונשאל האם הוא זוגי, נוכל בקלות להגיד "לא", אך אם נשאל האם הוא ראשוני, ניאלץ לעבוד קשה כדי לדעת את התשובה, ובכל זאת התשובה קיימת כבר מהאקסיומות הבסיסיות ביותר. לשאלת הרחבת המתמטיקה נתייחס לדוגמה של גאוס. גאוס בצעירותו הוכיח שניתן לבנות מצולע בן 17 צלעות באמצעות סרגל ומחוגה, זה דבר שלא היה ידוע קודם. אך גאוס הוכיח את השאלה באלגברה, ולכן לא נתן שום דרך לבנות את המצולע הזה, אלא רק הראה שדרך כזו אפשרית. בהמשך, נמצאו דרכים שונות לבנייה. ויטגנשטיין מתאר את זה כ־"הטלה" (Projection).

ויטגנשטיין "מוכיח" שמספר האצבעות ביד ומספר קדקודי המחומש הוא זהה, זאת על ידי התאמה חד־חד־ערכית ועל. דבר זה גורם לנו לשאול — איך? האם זו התאמה בין כל הידיים וכל המחומשים? או בין יד מסוימת ומחומש מסוים? ומה זה מוכיח בעצם? ומדוע ההתאמה קובעת זהות? ויטגנשטיין מנסה לטפל בבעיות אלה — "When we prove that the hand has as any strokes as the pentagram has points we did not do the same as we do when we perform an experiment—such as the experiment with the potatoes One might say that this figure is not an experiment but the picture of an experiment. A picture or a film of an ordinary experiment is not the same as an experiment; for the film may be faked. But it [can be] a proof. You might say that the relation between a proof and an experiment is that the proof is a picture of the experiment, and is as good as the experiment". מכאן, אדם יוכל להשתמש בתמונה של היד והמחומש, לשים את ידו ולבדוק את ההתאמה בפועל. אם תצא לו תוצאה אחרת, נאמר שהוא טועה וסוטה מהנורמה, לפי ויטגנשטיין.

ההוכחה היא שילוב של ניסוי ושל סדירות אמפירית, כאשר אנחנו מתייחסים אל ההוכחה כאל תמונה. ההוכחה איכשהו משכנעת אותנו, באופן הזה, לקבל את נכונותה. באריתמטיקה, המשפט (הכוללת סדירות אמפירית חדשה) ש־$\frac{1}{7}$ הוא חוזר על עצמו בפיתוח עשרוני דורס את חוקי החילוק, הווה אומר, אם לא נקבל מספר עם חזרה בפיתוח העשרוני, נאמר שהשתמשנו בכללי החילוק באופן שגוי. בגיאומטריה, ויטגנשטיין טוען שה־"גילוי" בבניית המצולע בן 17 צלעות שינתה את המובן של "בנייה" ושל "אנלוגי".

10 שיעור תשיעי

חשוב לזכור משהו שמופיע במובלע אצל ויטגנשטיין, והוא שכלל מתמטי הוא אפשרי רק בין שני דברים שונים (אבחנות, מושגים). דוגמה לכך היא ההתאמה בין היד למחומש שמופיעה, כאשר לכל אחד מהדברים יש אפיון שונה משלהם. חשוב להגיד שויטגנשטיין כותב בצורה דיאלקטית, חלק מדבריו אינם עמדותיו, אלא ההפך מעמדתו ואז מתווכח. בהרצאות מול תלמידים יש פחות מהשטיקים האלה, כשהוא כותב, לעומת זאת, יש דיאלוג עם עצמו.

פרופ' שטיינר יציג עכשיו עמדה שאינה עמדתו של ויגטשנטיין, ואנו נתווכח איתה במהלך השיעור: לפי ויטגנשטיין מתמטיקה אינה רצף של טיעונים, משפטים או פסוקים, אלא טכניקות ותחשיבים. ניתן דוגמה יסודית, $\frac{a}{b}=c$, ברוב ספרי המתמטיקה מגדירים את זה כ־$a=b\times c$. לכן, אין לחילוק המתמטי שום ערך מתמטי אלא רק פסיכולוגי, כי הוא לא מוסיף מאום, לכאורה. ויגטשנטיין נלחם בדבר הזה, שכן החילוק היא טכניקה שונה מהכפל, גם אם קוראים לזה הגדרה, לא נעשה מאומה. בעידן המודרני מקובל שהגדרה לא מוסיפה כלום, היא רק קיצור טקסט. ויטגנשטיין מתנגד לרעיון הזה לגמרי, לדעתו הגדרה אינה סתם קיצור, אלא היא מלבישה טכניקה חדשה על הטכניקה הישנה. הקשר בין כפל לחילוק הוא, לטענת פרופ' שטיינר, משפט מתמטי: סדירות רגולרית אחת מתואמת עם אחרת. דיברנו על כך שיש קשר כמעט מטאפיזי בין אקסיומות למשפטים, לא ניתן לחדש שום טכניקה כך, כי הכול קיים, לדעת ויטגנשטיין נוצרת אמונה תפלה ממצב עניינים שבגינה אדם מציית לכלל.

נשאל את השאלה: מה ההבדל בין להפר כלל מסויים של חילוק, לבין לקיים כלל אחר של פעולה אחרת? הקריטריון מבוסס על סדירויות אמפיריות.

11 שיעור עשירי

ויטגנשטיין נותן בתחילת הפרק בנייה שלו למצולע משוכלל מסדר 2^n שאנו יודעים שהוא אפשרי, ולמעשה זה אם ורק אם. ההוכחה הזו אמורה לגרום לנו להפסיק לחפש עבור ה־100־גון, המצולע המשוכלל בן **100** הקדקודים. המשפט הזה מחייב אותנו לשנות את הפרמטרים של הבעיה, במקום לחפש מצולע משוכלל מסדר 100, אלא לחפש חזקות של 2 ולשאול האם $2^n=100$ עבור איזשהו n טבעי. נוכל להגיד שזה משנה את מה שאנחנו מחפשים, אך אפשר גם להגיד שההוכחה מחייבת אותנו למחוק את "בניית מצולע משוכלל מסדר 100 עם מחוגה קובעה" מאוצר המלים שלנו. מכאן עלינו לדבר על "טענה מתמטית", האם היא דומה ל־"טענה פיזיקלית"? מה דינה של "השערה מתמטית". מתמטיקאים מדברים על "השערות מתמטיות" וזה מדאיג אותו, לא אכפת לו מה פילוסופים אומרים, אבל אם טיורינג או הארדי אומרים דבר כזה. מה העמדה של הארדי שמכעיסה את ויטגנשטיין, כמתנגד לפלטוניזם (ויטגנשטיין)? הארדי מדבר על השערות מתמטיות, הן ניחושים או אמונות מתמטיות גם בלי הוכחות. נניח, ישנה השערת פרמה, שהייתה פתוחה במשך כ־350~ שנה בטרם נמצאה לה הוכחה[5], אך במשך רוב הזמן המתמטיקאים שיערו שהיא נכונה גם טרם הייתה הוכחה. הארדי כותב בהמשך לכך משפט קיצוני, שהוכחה היא לא כזו חשובה ונועדה לשכנע אנשים שהטענה לא ברורה להם, כמו שאצל הפלטון יש דברים שברור שהם אמת גם אם אינם יודעים להוכיח זאת. בפלטוניזם יש לנו אמת מוחלטת, אם אני אינני יודע מה ההוכחה, אז זה בסדר כי אלוהים יודע וניתן לנחש.

משפטים מתמטיים מאפשרים לנו למצוא קשרים בין תחומים שונים במתמטיקה, נניח בין אריתמטיקה לגיאומטריה. אנחנו מתרגמים משפטים בין אוצר־מלים אחד לאחר. לאחר שאנו יוצרים את הקשר באמצעות משפט, אנחנו יכולים לפתח את מושג האנלוגיה ולהרחיבו. ההתאמות בין גיאומטריה ואריתמטיקה נובעות מההתאמות בין הסדירויות האמפיריות בין כל אחד מהענפים הללו. אנחנו מרחיבים את הגיאומטריה וסימוניה.

הנה דוגמה לשינוי (או עדיף, התפתחות) ברעיוננו לחילוק — חילוק ארוך. שימוש ברעיון החדש מפתח את הרעיון הישן. הרעיון החדש מאפשר לנו לפעול בתוך המסגרת של העולם הישן. עלינו להבין שסדירויות

[5] ההשערה טוענת שעבור המשוואה $a^n+b^n=c^n$, כאשר a,b,c מספרים טבעיים, אזי קיים לה פתרון רק אם $n\leq 2$. ההוכחה ניתנה על ידי אנדרו ויילס.

אמפיריות אינן נצחיים ועלינו ליצור חדשות על הישנות, כל עוד הן מסכימות נוכל להמשיך לבדוק אותן (בדומה למדידת אורך באמצעות סרגלים, מה עלינו לעשות אם נרצה למדוד מרחקים בין כוכבים?). סדירות אמפירית, אם היא מבוססת על בני־אדם, אם היא סדירות מאוד גדולה, אז לאחר מספיק זמן נקבל סטייה.

12 שיעור אחת־עשרה

12.1 ניסוי מתמטי

ההרצאה העשירית של ויטגנשטיין חשובה במיוחד. בניסויים אמפיריים אנחנו מצפים לראות מה התוצאה, אנחנו נצפה לכל תוצאה. יש מתמטיקאים המדברים על ניסויים מתמטיים, וזה מאיים על כל האנטי־מטאפיזיקה של ויטגנשטיין.

בעברו, ויטגנשטיין התנגד לרעיון של מספר הוכחות לאותו משפט, בשל טענתו שהוכחה נותנת את המשמעות למשפט, ועל כן כל הוכחה יוצרת משפט שונה. בהרצאה הזו ויגטשנטיין כבר מכיר במצב של כמה הוכחות לאותו משפט, זאת בשל רעיון הסדירויות האמפיריות הנותנות את מובן ה־"תוצאה הנכונה" למשפטים.

נחזור לנושא הניסוי, למה אנחנו מתכוונים באומרינו "ניסוי"? ויטגנשטיין משתמש בדוגמה של כפל של מספרים גדולים. במתמטיקה אנחנו מסכימים עם הניסויים רק אם התשובה היא נכונה. היינו יכולים כמובן לבצע ניסוי כדי לוודא שתלמיד מכפיל כהלכה, או לבדוק אם כאשר הוא מכפיל כהלכה הוא כותב את התשובה הנכונה וכדומה, מה שלא נוכל לבדוק זה מהי התשובה הנכונה של כפל. בניסוי פיזיקלי אנחנו סומכים על הטבע — מה שיצא יצא... במתמטיקה לעומת זאת, אנחנו לא בודקים את המתמטיקה אלא את התלמיד. לפי ויטגנשטיין, כל חישוב הוא משפט מתמטי המכניס אלמנטים חדשים למתמטיקה, ככל שזה נראה מוזר. היסוד של הרעיון הזה, לפי שיטתו של ויטגנשטיין שציות לכללים, אין שום עובדה הקובעת אם אדם מציין לכלל או לא, ולכן יש לקבוע קריטריוני משנה אם אדם ציית לכלל או לא.

ויטגנשטיין בהרצאה מכך חוסך את ערוותו. "Suppose we in this room are inventing arithmetic. We have technique of counting, but there is so far no multiplication. Suppose that I now make the following experiment. I give Lewy multiplication. We have invented multiplication up to 100; that is, we've written down things like 81×63 but have never yet written down things like 123×489. I say to him, "You know what you've done so far. Now do the same sort of thing for these two numbers." I assume he does what we usually do. This is an experiment—and one which we may later adopt as calculation." ועלינו להעיר, לפי זה, כל חישוב הוא כלל חדש. הכלל מלמד אותנו שעקבנו אחרי הכלל הישן כהלכה. ויטגנשטיין מוסיף בהמשך: "What does that mean? Well, suppose that 90 per cent do it all one way. I say, "This is now going to be the right result." The experiment was to show what the most natural way is—which way most of them go. Now everybody is taught to do it—and now there is a right and wrong. Before there was not. It is like finding the best place to build a road across the moors. We may first send people across, and see which is the most natural way for them to go, and then build the road that way. Before the calculation was invented or the technique fixed, there was no right or wrong result.", זהו האזכור המפורש ביותר לסדירויות אמפיריות.

המתמטיקאי והפילוסוף ברטראנד ראסל דיבר על כך שייתכן ש־$12 \times 12 = 1444$ היא טעות שכולנו טועים בה, מעיין שגיאה אוניברסלית. ויגטשנטיין חושב שזה אבסורד, הסדירות האמפירית יוצרת את התשובה הנכונה לדידו, ועל כן אין משמעות לשגיאה אוניברסלית. מה קורה בנוגע לכפל של מספרים גדולים למדיי? אם אנחנו מדברים על דברים שקשים לחשב, לא תהיה סדירות אמפירית ויהיו בעיקר סטיות של תוצאות לגבי כל אדם, מכאן ויטגנשטיין מודה שלא רק שאין תשובה נכונה, אלא ש־"This has ceased to be a calculation".

13 שיעור שתיים־עשרה

חסר. לא הייתי בשיעור ואשמח להשלים. מוזמנים ליצור קשר.

14 שיעור שלוש־עשרה

מתמטיקאים כאשר הם מדברים על מתמטיקה הם סמכות, אך כאשר הם מדברים על פילוסופיה של המתמטיקה אי אפשר לסמוך עליהם, כך טוען ויטגנשטיין. ויטגנשטיין מדגיש את השימוש האמיתי בביטויים, והטעויות בפילוסופיה נגרמות מכך שמעבירים את הביטויים האלה למגרש אחר, ולכן אי אפשר לסמוך על דברים כאלה.

טעויות בפילוסופיה של המתמטיקה נגרמות מהוצאת המספרים מהקשרם הרגיל ולהקשר אחר. לדוגמה, ב־"חקירות פילוסופיות" אלו הגוף השלישי והגוף השלישי שיש בלשון, יש הטיה טבעית, אומר ויטגנשטיין, ללכת אחרי הגוף השלישי, ואז כשאתה מדבר בגוף ראשון אתה מתייחס אליו כגוף שלישי. הדבר הזה הביא את הפילוסופיה המערבית לצרה צרורה, למשל "אני חושב" — אני מתאר את החיים הפנימיים של עצמי. כל ההגיונות של דקארט, הם תוצאה של טעות זו, שהגוף הראשון דומה בכלליו לגוף השלישי, אליבא דויטגנשטיין.

ויטגנשטיין מתעסק רבות עם השיח הפנימי של מתמטיקאים עצמם, כי שם הביטויים הפלאטוניסטים באים מהפה של המתמטיקאים עצמם, ויש סכנה שאנחנו נגיד שזהו השיח הרגיל של המתמטיקה (ולא של המתמטיקאים). לכן ויטגנשטיין מוכרח להבדיל בין המתמטיקאי כעוסק במתמטיקה והמתמטיקאי כפילוסוף חובבן. ויטגנשטיין מתייחס בעיקר למתמטיקאים שהוא מכיר אישית: טיורינג, הארדי והילברט. המתמטיקאי שוכח שאותו משפט יכול לשמש כמשפט מתמטיקה וכמשפט שאינו מתמטיקה, נניח "$50=20+30$" לעומת "30 תפוחים ועוד 20 תפוחים הם 50 תפוחים". לדברי ויטגנשטיין: "These discussions have had one point: to show the essential difference between the uses of mathematical propositions and the uses of non-mathematical propositions which seem to be exactly analogous to them... mathematicians, when they begin to phlosophize, always make the mistake of overlooking the difference in function between mathematical propositions and non-mathematical propositions."

אפשר לראות את הפילוסופיה של ויטגנשטיין כהמשך של קאנט. הסינתטי הוא הסדירות האמפירי והא־פריורי הוא הכלל הנורמטיבי. הא־פריורי פירושו שהחוש לא יכול להפריך את זה, לקאנט יש הרבה דברים על מה זה הא־פריורי הזה, אצל ויטגנשטיין אין זה אלא משום שאנחנו הפכנו את הסדירות לנורמה. אז יש לנו שתי טענות בדו־משמעות, הראשונה היא אמפירי והשנייה אינה אמפירית אלא ציווי או כלל. בנוגע לסדירות האמפירית, יש להפריד בין סדירויות אמפיריות על הטבע, שאינן תלויות בנו, וסדירויות אמפיריות בנוגע לאיך אנשים פועלים, סדירויות על האנושיות.

העיסוק בסדירויות אמפיריות נובע מכך שלכאורה כל היישומים של מתמטיקה הם אמפיריים. אך המתמטיקה יכולה להיות מיושמת לעצמה. אם נקבל את השיח הזה, נהיה בבעיה. האריתמטיקה ותורת המספרים שוב יהפכו לניסויים, אתה מלביש הסברים אחרים עליהם, כמו במדע.

נסתכל על הסקלה המדורגת של מספרים ראשוניים מהפרק שמתאימה לסקלה הלוגריתמית, לכאורה. פיזיקאים ייטו לצייר קו מגמה, או עקומת מגמה, ויגידו שהיא בערך $\frac{x}{\ln x}$. זוהי לא טענה מתמטית, זה הופך לטענה מתמטית כאשר אנחנו עונים על השאלה של "מה פירוש בערך?". האם הפירוש "לא מתרחק עד כדי 4?" או שימוש בהגדרת הגבול בלשון $\varepsilon-\delta$?

15 שיעור ארבע־עשרה

אצל ויטגנשטיין יש בעיה עם השימוש במלה "אמת". אם מסתכלים על המובן היומיומי שלה, אז הדברים אותם המתמטיקאים מוכיחים הם אמת, להגיד טענה ולהגיד שהטענה נכונה זה אותו הדבר (הפסוק "$2+2=4$" ו־"$2+2=4$ הוא אמת" זה אותו הדבר). ויטגנשטיין משווה את מושג האמת במושג הניצחון במשחקים. בהרבה משחקים יש מושג של ניצחון ושל מנצח. באופן כללי אנחנו חושבים שזה דבר טוב לדבר אמת, אבל ויטגנשטיין איננו חושב שלכל סוגי האמת יש מכנה משותף, במתמטיקה הכללים קובעים שמשפט אמיתי בא אחרי הוכחה (כמו שניצחון במשחק מגיע אחרי התאמה לכללים ועבודה על פי הם בצד הטוב ביותר). כלומר, ההוכחה מאפשרת את הטענה, אבל יש משחקים אחרים שניצחון בהם, כלומר, האפשרות לטעון טענה שונה לחלוטין.

15.1 אמת פלטוניסטית

נעבור עכשיו למתמטיקה ונסיים לדון בנושא ה־$\frac{1}{7}$, שבו מדובר במשפט מתמטי אמיתי (המדבר על כך שהשבר העשרוני הוא מחזורי). המתמטיקאי הארדי מתבונן על טענות מתמטיות מזווית של מתמטיקאי, וטוען שהוא יכול להאמין בהן כנכונות גם ללא הוכחה (מה שקרוי "השערה"). עבור ויטגנשטיין, מה שניתן להאמין בו כנכון או לא נכון אינו אותו הדבר כמשהו שניתן להוכיח. טענה מתמטית יכולה אם כן לקבל שתי משמעויות שונות, מובן נסיוני ומובן מתמטי. לצורך הבנת העניין, נחזור מעט אחורה לנושא הפלטוניזם אצל ויטגנשטיין. הפלטוניזם הקלאסי כולל התייחסות למתמטיקה כאידיאל, אפילו שיש עצמים אידיאלים, ואפיסטמולוגיה פלטוניסטית אמורה להסביר לנו איך אנחנו מבינים את האידיאל כאשר אנחנו לא חלק ממנו. בכתבי אפלטון, בדיאלוג "הפוליטאה" למשל, יש דיון באריכות בנושא אם המתמטיקה היא אידיאל — כיצג אנו יכולים להבינה? יש הרבה פילוסופים שמרדו באפלטון, ויש מסורת ארוכה הכוללת את קאנט. חלק מהפילוסופים האלה רצו לשלול לגמרי את מושג האמת מהמתמטיקה, שכן הם כפרו באידיאל ומכאן הגיעו למסקנה המוכרחת (לשיטתם) שאקסיומות המתמטיקה אינם אמיתיות (ואולי גם לא שקריות). בכלל, אין להן ערך אמת. ויטגנשטיין חשב שהמסקנה הזו היא שגויה

לחלוטין, מפני שזה משחק בתוך המגרש הפלטוניסטי — ההנחות אותן הנחות אך עם הגעה למסקנה ההפוכה ותו לא. ויטגנשטיין מגיע מכיוון מאוד עמוק של אנטי־פלטוניזם, הוא מתנגד לכך שיש אמת אובייקטיבית שבה משפטים נקבעים כאמת או שקר בהתאם לאקסיומות. בדוגמה שלנו כאן, גם מי שחושב שכללי החילוק דומים לכללי משחק, ולכן אי אפשר להגיד על המשפט של $\frac{1}{7}$ שהוא אמת, את זה צריכים לקבל — אם קיבלת את האקסיומות או כללי המשחק, אז אין לך שום ברירה אלא להסכים להוכחה, עד כדי כפייה ממש. לפי הפלטוניזם הסמוי, פעולות החילוק והכפל קובעות אינסוף טענות נכונות, בן אם האדם ראה אותם או לא, למשל המשפט האחרון של פרמה, שהוכח לפני עשרים שנה, הוא משפט שמאוד פשוט לנסח ומאוד קשה להוכיח, זה מה שמעניין ויפה בו ובמתמטיקה בכלל. לפי הארדי, זה לא משנה אם אני יודע אם ההוכחה או לא — אם קיבלתי את כללי המשחק של המתמטי, ערך האמת של משפט פרמה, או אפילו השערות שלא הוכחו כמו השערת גולדבך, אז ערך האמת או אמיתי או שקרי. כדי להוכיח יש להביא הוכחה, כדי להפריך יש דוגמה נגדית, אבל אלוהים בשמיים יודע את התשובה ואנחנו רק צריכים לגלות. הרעיון שהתשובה כבר נקבעת ברגע שקיבלת את כללי המשחק המתמטיים, זו אליבא דויטגנשטיין אמונה תפלה פלטוניסטית, בדומה לאמונה ש־5 או 7 הם עצמים קיימים בגן־העדן של המתמטיקה, והיחס של האקסיומות לעצמים קיים בגן־העדן של המתמטיקה.

חשוב לשים לב להבדל בין הטענות "הספרות בפיתוח העשרוני של $\frac{1}{7}$ נקבעות מראש" לבן "החזרתיות בספרות נקבעת מראש". אחת היא סדירות מסדר ראשון והשנייה היא סדירות מסדר שני, נובעת מהסדירות האמפירית, אנשים מצייתים לכללים והסדירות של הסדירות האמפירית גורמת לכך שרוב האנשים יחשבו את הספרות באותו אופן שיגרום למחזוריות; בלשונו של ויטגנשטיין — "צריך כלל לציית לכלל". המחזוריות נובעת מכלל על שנובע מאיך שאנחנו נובעים מהכלל הראשון. פרופ' שטיינר טוען שויטגנשטיין מנסה לשכנע אותנו לוותר על כל המיסטיקה של המתמטיקה.

בנוגע להוכחה, פרופ' שטיינר טוען שלדעתו ויגטשנטיין חושב שהוכחה משכנעת אדם על תוצאות ניסוי, בדומה ל־"ניסויי מחשבה" בפיזיקה. ההוכחה לא משכנעת אותנו בשום דבר אידיאלי, אלא באה לעורר ניסוי מחשבה שמשכנע אותי ברמה האמפירית, "מה תהיה התוצאה של ניסוי לו אני אערוך אותו". ההוכחה לא תשכנע אותי על משהו בשמיים, אלא אם אני אראה עצמי כעורך ניסוי אמפירי, כמישהו המציית לכללים, ההוכחה משכנעת אותי שתוך כדי שאני משתדל לציית לכללים אני יוצר צורה חדשה של מחזוריות, וזה כבר ברמה האמפירית. כלומר, אם פרופ' שטיינר צודק בהבנת ויטגנשטיין, ההוכחה המתמטית מייתרת את הניסוי המתמטי. זה אינטואיציה מתמטית שאינה מקובלת כ"כ, גם במתמטיקה, כי אף אחד פרט לויטגנשטיין לא ראה הוכחה מתמטית כמשהו אמפירי.

מה המעמד של חוק שלישי מן הנמנע בכל זאת? לפי האינטואיציוניסטים, אסור שיהיה משפט מתמטי שאומר "או שיש 500 פעמים 7 בפיתוח של π או שלא", האינטואיציוניסטים טוענים שזו מתמטיקה תיאולוגית. מה קורה אצל ויטגנשטיין? ויטגנשטיין ודאי מסכים עם האינטואיציוניסטים, שכללי פיתוח π הם פסי רכבת לאינסוף, שיש אפשרות לדבר על הקביעה האינסופית של כללים אלה של פיתוח. מצד שני, ויטגנשטיין טוען שהאינטואיציוניזם מדבר דברים בטלים, בשל זה שהוא הורס את המתמטיקה על ידי דיבורים פילוסופיים. אם מתמטיקאי קלאסי יטען "P או $\neg P$", אז ויטגנשטיין מחוייב להסכים איתו בשל אמונתו בשמירת המתמטיקה שלמה.